Donc $\lim_{n \to +\infty} \vartheta_n - I = 0$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \vartheta_n = I}$

d-) Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de **I**

$$\vartheta_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$= \boxed{\frac{76}{105}}$$

On $|\vartheta_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$

pour $n = 3$

$$|\vartheta_3 - I| \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} \leq \vartheta_3 - I \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} \leq I - \vartheta_3 \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} + \vartheta_3 \leq I \leq \frac{1}{7} + \vartheta_3$$

$$\boxed{-\frac{1}{7} + \frac{76}{105} \leq I \leq \frac{1}{7} + \frac{76}{105}}$$